VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 4

Algebra matrica.
Inverzna matrica.
Determinanta

Poglavlje 1

Algebra matrica

Neka su m i n prirodni brojevi. Shema u kojoj familiju A realnih brojeva a_{ij} $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ zapisujemo na sljedeći način

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zove se **matrica** od **m redaka** i **n stupaca**, tj. matrica **tipa m × n**. Za element a_{ij} kažemo da dolazi na mjestu (i, j) u matrici A. Skraćeno matricu zapisujemo (a_{ij}).

Dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ su **jednake** ako su istog tipa $m \times n$ i $a_{ij} = b_{ij}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, m\}$ i svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Brojevi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ čine **prvi redak**, $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ **drugi redak**, a $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ **m-ti redak** matrice A.

Brojevi $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ čine **prvi stupac**, $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}$ **drugi stupac**, a $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ **n-ti stupac** matrice A.

Za matricu A kažemo je **kvadratna matrica n-tog reda** ako je $m = n$.

Transponirana matrica matrice $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $B = (b_{ji})$ tipa $n \times m$ za koju je $b_{ji} = a_{ij}$ $(i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$. To možemo shvatiti kao zamjenu uloga stupaca i redaka, stupci postaju retci i obratno. Transponiranu matricu označavamo s A^τ.

Zadatak 1 *Nađite transponiranu matricu matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

Za matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zbrajati se mogu samo matrice istog tipa, i to na sljedeći način:

Zbroj matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, što znači da se zbrajaju elementi na istim pozicijama.

Zadatak 2 *Zbrojite slijedeće matrice:* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 2+5 \\ -1+(-3) & 0+(-1) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiramo množenje matrice skalarom: **Produkt broja λ s matricom** $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Zadatak 3 *Nađite slijedeći produkt matrice i skalara:* $(-3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: $(-3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom vrijede svojstva koja vrijede i za realne brojeve, dakle asocijativnost, komutativnost, te distributivnost množenja (skalarom) prema zbrajanju.

Razliku matrica $A - B$ treba shvatiti kao skraćeni zapis za $A + (-1) \cdot B$.

Preostaje još definirati množenje matrica. Produkt AB matrica A i B definira se samo ako matrica A ima toliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Broj redaka matrice AB isti je kao i matrice A, a broj stupaca jednak je broju stupaca matrica B.

Neka je matrica A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$. **Produkt matrica** A i B je matrica C tipa $m \times p$, čiji su elementi dani s

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj}$$

to jest, na ij-otom mjestu je umnožak i-tog redtka matrice A i j-tog stupca matrice B.

Zadatak 4 *Nađite AB i BA ako su A i B slijedeće matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rješenje: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 3\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \ldots = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Iz definicije i primjera se vidi da množenje matrica općenito **nije komutativno**. Dapače, čest je slučaj da postoji umnožak dviju matrica AB, ali uopće nije definiran umnožak BA, pa uspoređivanje matrica AB i BA nema smisla.

Međutim, množenje matrica jest asocijativno, tj. za svake tri matrice A, B i C takve da su svi produkti AB, $(AB)C$, BC i $A(BC)$ definirani, vrijedi

$$(AB)C = A(BC).$$

Važnu ulogu u množenju matrica imaju jedinična i nul-matrica. Pod uvjetom da je za proizvoljnu zadanu matricu A množenje jediničnom matricom I (nekog reda) i nul-matricom O (nekog reda) dobro definirano, vrijedi $A \cdot I = I \cdot A = A$ (tj. jedinična matrica djeluje kao neutralni element za operaciju množenja matrica) i $A \cdot O = O \cdot A = O$.

Formalno možemo uvesti potenciranje matrice prirodnim brojevima: produkt $A \cdot A$ skraćeno pišemo kao A^2, $A \cdot A \cdot A = A^3$ itd.

Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju slijeva i zdesna (uz uvjet da su svi produkti dobro definirani):

$$C(A+B) = CA + CB,$$

$$(A+B)D = AD + BD.$$

Vrijede i slijedeća svojstva za množenje skalarom λ:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)D = A(\lambda D).$$

Zadatak 5 *Izračunajte $A + 2B$ za sljedeće matrice (ako postoji):*

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zadatak 6
Za matrice A i B izračunajte AB i BA (ako postoje):

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

BA ne postoji jer bi imali množenje 3×3 matrice s 2×3 matricom što nije definirano.

Zadatak 7 *Neka je* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. *Izračunajte* A^3 *i* $(A^\tau)^2$.

1.1 Determinanta

Determinanta je realna funkcija koja kvadratnoj matrici pridružuje realan broj (kojeg zovemo **determinanta matrice**), a osnovna svojstva kojeg zadovoljava jesu:

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \\
\det I &= 1.
\end{aligned}$$

Determinantu matrice $A = (a_{ij})$ označavamo s $|a_{ij}|$, npr. za matricu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pišemo umjesto $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ skraćeno $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Funkciju $A \to \det A$ možemo definirati razvojem po prvom retku:

(1) Za kvadratnu matricu **prvog** reda (degenerirani slučaj, jer se matrica sastoji od samo jednog elementa) definiramo: $\det(a) := |a|$

(2) Za kvadratnu matricu **drugog** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(3) Za kvadratnu matricu **trećeg** reda:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

(n) Za kvadratnu matricu **n-tog** reda $A = (a_{ij})$ definiramo

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdje je A_{1k} ($k \in \{1, \ldots, n\}$) kvadratna matrica (n-1)-og reda koja se od matrice A dobije ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca.

U definiciji determinante za opću matricu n-tog reda mogli smo fiksirati bilo koji redak ili stupac, nije bilo potrebno uzeti baš prvi redak.

Zadatak 8 *Razvojem po drugom retku izračunajte*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Svakom elementu gornje matrice pridružen je multiplikativni faktor 1 ili -1, ovisno o tome na kojem se mjestu u matrici element nalazi. Npr. broj 4 se nalazi na presjeku drugog retka i drugog stupca, pa je njemu pridružen faktor $(-1)^{2+2}$, dakle broj 1 (općenito, elementu a_{ij} pridružen je broj $(-1)^{i+j}$). Razvoj po drugom retku sada izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9+2) + 4 \cdot (6-1) + 5(-4-3) = -4.$$

Zadatak 9 *Izračunajte determinatu matrice iz prošlog zadatka razvojem po trećem stupcu i prvom reku te se uvjerite da vrijednost determinante zadane kvadratne matrice **ne ovisi** o tome po kojem se stupcu ili retku determinanta razvija. Ova činjenica znatno olakšava računanje determinante, jer nam omogućuje da izaberemo stupac ili redak po kojem razvijamo determinantu. U pravilu biramo onaj redak ili stupac koji sadrži najviše nula.*

Zadatak 10 *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Zadatak 11

Izračunajte determinante sljedećih matrica:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha + \imath\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - \imath\sin\alpha \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{pmatrix}$.

Zadatak 12 *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Rješenje: Razvojem po trećem retku imamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

1.2 Inverzna matrica

Pojam inverzne matrice uvodimo samo za kvadratne matrice. Za kvadratnu matricu A n-tog reda kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica B reda n tako da vrijedi

$$AB = BA = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Kažemo da je matrica **singularna** ako ona nije regularna.

Može se pokazati da je matrica B iz definicije inverzne matrice **jedinstvena**. Stoga za nju uvodimo posebnu oznaku: ako matrica A ima inverz, označavat ćemo ga s A^{-1}. Po definiciji dakle vrijedi:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Za svake dvije invertibilne matrice A i B reda n, te jediničnu matricu I istog reda vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(3) $I^{-1} = I$

Za invertibilnost imamo važan kriterij: singularna matrica ima determinantu nula, što znači da su sve matrice koje imaju determinantu različitu od nule nužno regularne (invertibilne matrice), a vrrijedi i obrat. Drugim riječima, regularne matrice su one i samo one kvadratne matrice koje imaju determinantu različitu od nule. Ovo nam daje dobar način provjere postojanja inverza zadane kvadratne matrice.

Sada ćemo vidjeti kako se pojam determinante može iskoristiti za izračunavanje inverza kvadratne matrice.

Adjunkta A^* kvadratne matrice A je matrica koja na (i,j)-om mjestu ima broj $(-1)^{j+i} \cdot \det A^\tau_{ij}$ (zovemo ga **kofaktor** ili **algebarski komplement** elementa a_{ij}), gdje je A^τ_{ij} matrica dobivena iz transponirane matrice A^τ izbacivanjem i-og retka i j-og stupca.

Zadatak 13 *Za matricu* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *izračunajte adjunktu.*

Rješenje: Prvo računamo transponiranu matricu A^τ :

$$A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zatim računamo $A^* = (a^*_{ij})$ po elementima:

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 2$$

$$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot 3 - 2 \cdot 5) = 7$$

$$\vdots$$

$$a^*_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4,$$

što daje $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Preko adjunkte možemo izračunati i inverznu matricu zadane kvadratne matrice A. Naime, vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Zadatak 14 *Izračunajte inverz matrice iz prethodnog primjera.*

Rješenje: Već smo izračunali ajdunktu A^* matrice A, pa preostaje izračunati samo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25,$$

pa je

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 15 *Pomnožite gornji inverz i matricu A te se uvjerite da stvarno dobivate jediničnu matricu I.*

Zadatak 16

Metodom adjunkte odredite inverz matrice iz Zadatka 8.

1.3 Veza operatora i matrica

Iz lekcija prije znamo da se razne funkcije, kao npr. transformacije ravnine, mogu predstaviti preko matrica. Množenje matrica u tom slučaju odgovara komponiranju funkcija a inverzna matrica pripada inverznoj funkciji (ako ista postoji).

Zadatak 17 *Provjerite preko matrica da je kompozicija rotacije oko ishodišta u ravnini za kut α i rotacije oko ishodišta u ravnini za kut β upravo rotacija u ravnini oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$.*

Rješenje:

rotacija za kut α ima matrični prikaz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

roatcija za kut β ima matrični prikaz $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Množimo te dvije matrice:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i dobivamo upravo matricu rotacije u ravnini oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$.

Zadatak 18 *Nađite inverznu funkciju centralne simetrije u prostoru oko xz ravnine.*

Rješenje: Gledamo matricu te centralne simetrije, x i z koordinata točke ostaju iste a y prelazi u $-y$ pa je to:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodom adjunkte ili direktnim uočavanjem vidimo da je inverz te matrice upravo ona sama, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zaključujemo da je inverz naše centralne simetrije opet ta ista centralna simetrija što je i jasno iz definicije funkcije.